半線型退化楕円型方程式の解の除去可能な特異点とその応用(ポテンシャル論とその関連分野)

堀内, 利郎

数理解析研究所講究録
1016 巻 1997 年 8-21

半線型退化楕円型方程式の解の除去可能な特異点とその応用

堀内　利郎
(TOSHIO HORIUCHI)

茨城大学・理学部・数理科学科

0. Introduction.

$N \geq 1$ かつ $p > 1$ とする。. F を コンパクト集合、Ω を $\mathbb{R}^N$ の有界開集合とし、$F \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ を仮定する。さらに $\Omega' = \Omega \backslash \partial F$ とおき, $\partial F = F \backslash \mathrm{Int}\, F$ とする。.

ここで、退化楕円型作用素 P を次のように定義する。

(0-1)
$$P = -\operatorname{div}(A(x)\nabla \cdot),$$

ここで、 $A(x) \in C^1(\Omega')$ は $\Omega \setminus F$ で正で $\mathrm{Int}\, F$ 上で 0 であるとする。先ず、我々は半線型退化楕円型方程式の解の除去可能性を調べる。それは荒く言うと、$u \in C^0(\Omega') \cap C^2(\Omega \setminus F)$ が微分不等式

(0-2)
$$Pu + B(x)Q(u) \leq C(x), \qquad \text{in } \Omega',$$

が、ある非負関数 $B(x)$ and $C(x)$ に対して成立するとき、$A(x), B(x), C(x)$ $Q(t)$ に関するある条件のもとで

(0-3)
$$\limsup_{x \to \partial F} u(x) < +\infty.$$

が成立することを示すことに帰着する。ここで $Q(t)$ は、連続、単調増加な $\mathbb{R}$ 上の関数で条件 (1-8) を満たすとする。例えば $|t|^{p-1}t$ $(p > 1)$, $(e^{|t|} - 1)sgn(t)$ などが $Q(t)$ の例となる。この結果から、もし $u \in C^0(\Omega') \cap C^2(\Omega \setminus F)$ が

(0-4)
$$Pu + B(x)Q(u) = f(x), \qquad \text{in } \Omega',$$

ここで $f/B \in L^\infty(\Omega)$, を満たせば、Ω 上で有界な関数が存在して、u と $\Omega' = \Omega \backslash \partial F$ 上で一致し方程式を満たすことがわかる。

この結果は H.Brezis and L.Veron によって, F が有限集合でかつ $Q(t) = |t|^{p-1}t$、$A(x), B(x), C(x)$ が 正定数のときに１９８０年に得られている。正確には彼らは [BV] において、もし u が (0-2) とある p についての付加条件を満たせば、u は除去可能な特異点のみを F 上に持つことができることを示した。(See also [VV 1], [VV 2] and [V])。この講究録では我々は彼らの結果をできる限り一般化する事を考える。荒く言えば、F として任意のコンパクトを許し、さらに作用素自身も (0-1) の様に最大限に一般化することを考える。ここでは P は 退化するだけではなく、F の内点では非有界になることが許されるのである。主な道具は比較原理、加藤の不等式と弱最大値原理である。

次に我々は、種々の反例を構成することで除去可能性に関する結果が F が十分滑らかな集合であるときにはシャープ（必要十分）であることを示す。

最後に応用として 真に退化する半線型退化楕円型方程式に関するディリクレ境界値問題

$$(0\text{-}6)\qquad \begin{cases} Pu + B(x)Q(u) = f(x), & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

の有界な解の一意存在を示す。P が一様楕円型（on $\overline{\Omega}$）であれば, この問題に対してはは多くの研究がすでにある。([S], G. Stampacchia : linear case) , ([BS] H. Brezis and W.A. Strauss : $f \in L^1(\Omega)$,$Q(u)$ 単調増加 (possibly multi-valued)) , （その他：[BBC] [BG])。準線型の場合も多くの研究がある。([LL], [LM], [BGDM],[R1],[R2],[R3], and so on)。しかし、純粋に退化する場合にはまだ殆ど結果がない状況である。

この講究録の構成は次のようです。§1 では正確なセッティングと主要な結果を述べます。§2 では定理がシャープであることを反例を構成して説明します。§3 is 定理の証明の準備です。§4 定理 1を示します。最後に定理２は §5 で示されます。

1. 主要結果.

$N \geq 1$、F と Ω をそれぞれコンパクトと有界開集合とし、$F \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ を満たすとする。さらに

$$(1\text{-}1)\qquad \Omega' = \Omega \setminus \partial F.$$

と置くが、ここで ∂F は $\partial F = F \setminus \text{Interior of } F$ と定義される。正則化された ∂F への距離を次のように定義する。

Definition 1. $d(x) \in C^\infty(\Omega')$ を次を満たす非負関数とする。

$$C^{-1} \le \frac{d(x)}{dist(x,\partial F)} \le C, \qquad \text{(1-2)}$$
$$|\partial^\gamma d(x)| \le C(\gamma) dist(x,\partial F)^{1-|\gamma|}, \quad x \in \Omega',$$

ここでγ は任意の multi-index で $C(\gamma)$ は x に無関係な正定数である。

先ず、次の [H-1] を非負関数 $A(x), B(x)$ and $C(x)$ 　に仮定する。

[H-1].

$$\text{(1-3)} \qquad \begin{cases} A(x) \in C^1(\Omega') \cap L^1_{loc}(\Omega), \\ A(x) = 0 \quad \text{in Int } F = F \setminus \partial F, \\ A(x) > 0 \quad \text{in } \Omega \setminus F, \end{cases}$$

$$\text{(1-4)} \qquad \begin{cases} B(x) \in L^\infty_{loc}(\Omega') \cap L^1_{loc}(\Omega), \\ B(x) > 0 \quad \text{in } \Omega' = \Omega \setminus \partial F, \end{cases}$$

and

$$\text{(1-5)} \qquad \begin{cases} C(x) \in L^\infty_{loc}(\Omega') \cap L^1_{loc}(\Omega), \\ C(x) \ge 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

次に [H-2] を非線型項 $Q(t)$ 　に仮定する。

[H-2].

$$\text{(1-6)} \qquad \begin{cases} Q(t) \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上で単調増加で連続であり、次を満たすとする。} \\ Q(0) = 0 \quad \text{と} \quad Q(t)t > 0 \quad \text{for any } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Definition 2. Let us set for $x \in \Omega' = \Omega \setminus \partial F$

$$\text{(1-7)} \qquad \begin{cases} \widetilde{A(x)} = A(x) + d(x)|\nabla A(x)|, \\ \mathbf{\Phi}(x) = \text{ess-sup}_{|y-x|<\frac{d(x)}{2}} \frac{\widetilde{A(y)}}{B(y)}, \\ \mathbf{\Psi}(x) = \text{ess-sup}_{|y-x|<\frac{d(x)}{2}} \frac{A(y)}{B(y)}. \end{cases}$$

さらに

[H-3]. There is a positive number $\delta_0 > 0$ such that

$$\sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{|t|^{1+\delta_0}}{|Q(t)|} < +\infty, \tag{1-8}$$

and

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{0<d(x)<\varepsilon} \widetilde{A(x)} \left[\left(\frac{\Phi(x)}{d(x)^2} \right)^{\frac{1}{\delta_0}} + 1 \right] \frac{dx}{d(x)} < +\infty. \tag{1-9}$$

そして

[H-4].

$$\sup_{x \in \Omega} \frac{C(x)}{B(x)} < +\infty. \tag{1-10}$$

Remark 1. 条件 (1-9) は $B(x)$ が $A(x)$ と比べてあまりは速く消えないことを意味する。また、もし $1 \leq N \leq 2$ であれば $\widetilde{A}$ か Φ のどちらかは ∂F 上で消えなければならない。

次が主定理の一つである。

Theorem 1. *Assume that [H-1], [H-2], [H-3] and [H-4]. Assume that $u \in L^\infty_{loc}(\Omega')$ satisfies $Pu \in L^1_{loc}(\Omega')$ in the distribution sense. Moreover we assume that for almost all $x \in \{x \in \Omega'; u(x) \geq 0\}$,*

$$Pu + B(x)Q(u) \leq C(x). \tag{1-11}$$

Then we have $u_+ \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, where $u_+ = \max(u, 0)$.

この定理の直接の系として次が成立する。

Corollary 1. *Assume that [H-1], [H-2] and [H-3]. Instead of [H-4], assume that $f(x) \in L^\infty_{loc}(\Omega') \cap L^1_{loc}(\Omega)$ satisfies for some positive number C*

$$|f(x)| \leq C \cdot B(x), \quad \text{for almost all } x \in \Omega. \tag{1-12}$$

Assume that $u \in L^\infty_{loc}(\Omega')$ satisfies

$$Pu + B(x)Q(u) = f, \quad \text{in } D'(\Omega'). \tag{1-13}$$

Then there exists a function $v \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ *such that*

$$\text{(1-14)} \qquad \begin{cases} Pv + B(x)Q(v) = f, & \text{in } D'(\Omega) \\ v\big|_{\Omega'} = u. \end{cases}$$

Proof of Corollary 1. Theorem 1 から $u_+ \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ と $u_- \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ がわかる。したがって $u \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$. ここで $A(x) = 0$ on $F \setminus \partial F$ から, $u(x) = v(x) = Q^{-1}(f(x)/B(x)))$ on $F \setminus \partial F$. 最後に一意性も Theorem 2 in §4 と同じ議論でわかることを注意して置く.

応用として半線型退化楕円型方程式に関するディリクレ問題の解の一意存在を調べる。

$$\text{(1-15)} \qquad \begin{cases} Pu + B(x)Q(u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

そのとき、

Theorem 2. *Assume that [H-1], [H-2] and [H-3]. Instead of [H-4] assume that* $f(x) \in L^{\infty}(\overline{\Omega})$ *satisfies for some positive number* C

$$\text{(1-16)} \qquad |f(x)| \leq C \cdot B(x), \quad \textit{for almost all } x \in \Omega.$$

Moreover we assume that $A(x), B(x) \in C^0(\overline{\Omega})$. *Then there exists a unique function*

$$\text{(1-17)} \qquad u \in L^{\infty}(\Omega) \cap H^1_{loc}(\overline{\Omega} \setminus F)$$

which satisfies (1-17) in the distribution sense and satisfies

$$\text{(1-18)} \qquad \int_{\Omega} [A(x)|\nabla u|^2 + B(x)Q(u)u]\, dx \leq C||f/B||_{\infty}.$$

Here C *is a positive number independent of each function* f.

Remark. もし Q が一様にリプシッツ連続であれば $u \in H^2_{loc}(\Omega \setminus F)$ がわかる。この定理の証明は、問題自身を正則な問題で近似し、定理 1 を用いて、近似列の解の列が一意的に有界な解に収束することを示すことに帰着する。

2. Counter examples to Theorem 1.

F を原点か $m-$dimensional C^∞ compact submanifolds in $\mathbb{R}^N$ （$0 < m \le N-1$）とし、

$$(2\text{-}1) \qquad L_\alpha u = -\operatorname{div}(d(x)^{2\alpha}\nabla u) \quad \text{and} \quad Q(u) = |u|^{p-1}u.$$

を考える。先ず次の (H-1) を仮定する。

$$(\text{h-}1) \qquad \beta > -\frac{N-m}{2}, \quad \text{and} \quad \gamma > -\frac{N-m}{2}.$$

さらに $0 \le m \le N-1$ として

$$(2\text{-}2) \qquad p_m^* = \begin{cases} 1 + 2\dfrac{1-\alpha+\beta}{N+2\alpha-2-m}, & \text{if} \quad \alpha < \beta+1, \\ 1, & \text{if} \quad \alpha \ge \beta+1. \end{cases}$$

とおく。次に (h-2) を仮定する（ (1-7) in [H-3]）.

$$(\text{h-}2) \qquad \begin{cases} p \ge p_m^*, & \text{if} \quad \alpha < \beta+1, \\ p > p_m^* = 1, & \text{if} \quad \alpha \ge \beta+1, \\ \alpha > -\dfrac{N-m-2}{2}. \end{cases}$$

最後に (h-3) を仮定する。([H-4]）.

$$(\text{h-}3) \qquad \beta \le \gamma.$$

前と同じく $u_+ = \max[0,u]$ and $u_- = \max[0,-u]$

Theorem 3. *Let F be either the origin or an $m-$dimensional C^∞ compact submanifolds in $\mathbb{R}^n$ for $0 < m \le N-1$. Assume that [h-1], [h-2] and [h-3]. Assume that $u \in L^\infty_{loc}(\Omega')$ satisfies $L_\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega')$ in the distribution sense. Moreover we assume that for almost all $x \in \{x \in \Omega; u(x) \ge 0\}$*

$$(2\text{-}3) \qquad L_\alpha u + b(x)d(x)^{2\beta}u^p \le c(x)d(x)^{2\gamma},$$

for some positive smooth functions $b(x)$ and $c(x)$. Then we have $u^+ \in L^\infty_{loc}(\Omega)$.

Proof of Theorem 3. $Q(u) = |u|^{p-1}u$ なので, $\delta_0 = p-1$ とおくと (1-8) and (1-9) in [H-3]　が成立する。$A(x) = d(x)^{2\alpha}, B(x) = b(x)d(x)^{2\beta}$ かつ $C(x) =$

$c(x)d(x)^{2\gamma}$として, Theorem 1 を適用する。([H-1], [H-2] は満たされている。) したがって　(1-9) in [H-3] を確かめればよい。直接の計算で

(2-4)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\int_{0<d(x)<\varepsilon}\left(d(x)^{-\frac{2(1-\alpha+\beta)}{\delta_0}}+1\right)d(x)^{2\alpha-1}\,dx\\
&\quad=\frac{1}{\varepsilon}\int_{0<d(x)<\varepsilon}\left(d(x)^{\frac{2\alpha-1}{p-1}\left(p-\frac{2\beta+1}{2\alpha-1}\right)}+d(x)^{2\alpha-1}\right)dx\\
&\quad=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}d\rho\int_{d(x)=\rho}\left(d(x)^{\frac{2\alpha-1}{p-1}\left(p-\frac{2\beta+1}{2\alpha-1}\right)}+d(x)^{2\alpha-1}\right)dH^{N-1}(x)\\
&\quad\le C diam(F)^m\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\left(\rho^{\frac{2\alpha-1}{p-1}\left(p-\frac{2\beta+1}{2\alpha-1}\right)}+\rho^{2\alpha-1}\right)\rho^{N-m-1}\,d\rho\\
&\quad=C' diam(F)^m\left(\varepsilon^{\frac{N+2\alpha-m-2}{p-1}\left(p-\frac{N+2\beta-m}{N+2\alpha-m-2}\right)}+\varepsilon^{2\alpha+N-m-2}\right)\\
&=O(1).\qquad \text{(h-1) and (h-2)}
\end{aligned}
$$

がわかる。これで定理が示された。

Counter-examples to Theorem 3.

F を前と同じとする。(原点か $m-$dimensional C^∞ compact submanifolds (with boundary) in $\mathbb{R}^n$ for $0 < m \le N-1$) . したがって $F = \partial F$ である。反例は局所的に作ればよいので、 $d(x) = dist(x, F)$ で $d(x)$ は F^c で滑らかで $|\nabla d(x)| = 1$ と仮定する。$U(x) = d(x)^{-M}$,　　for $M > 0$. とおく。U が次をある $M > 0$ で満たすとしてみる。

$$L_\alpha U(x) + b(x)d(x)^{2\beta}U(x)^p = 0, \quad \text{in } W \setminus F.$$

つまり

$$M(d(x)\Delta d(x) + 2\alpha - 1 - M) + b(x)d(x)^{2(1-\alpha+\beta)-M(p-1)} = 0.$$

もう少し計算すると

$$p = 1 + \frac{2(1-\alpha+\beta)}{M}, \quad M(d(x)\Delta d(x) + 2\alpha - 1 - M) + b(x) = 0.$$

が満たされれば反例ができることがわかる。また

$$M > d(x)\Delta d(x) + 2\alpha - 1.$$

であれば $b(x)$ は正となる。ここで F として特別な集合をとることにしよう.
$F = F_m$, ここで

$$\begin{cases} F_m = \{x : x_1^2 + \cdots + x_m^2 \leq 1, x_{m+1} = \cdots = x_N = 0\}, \\ \text{for } 1 \leq m \leq N-1, \\ F_0 = \{0\} \end{cases}$$

すると

$$dist(x, F_m) = \sqrt{\sum_{l=m+1}^{N} x_l^2}, \quad \text{if } \sum_{l=1}^{m} x_l^2 \leq 1,$$

$$dist(x, F_m)\Delta dist(x, F_m) = N - m - 1, \quad \text{for } 0 \leq \sum_{l=1}^{m} x_l^2 \leq 1.$$

このとき条件は

$$\begin{cases} M(N - m + 2\alpha - 2 - M) + b(x) = 0 \\ M > N - m + 2\alpha - 2. \end{cases}$$

結局

Proposition 1. *Assume that $F = F_m$ for $0 \leq m \leq N-1$. Moreover we assume that [h-1]. Then for the validity of Theorem 3, the assumptions [h-2] is necessary.*

Proof of Proposition 1. 略

同様に [h-3] についても次のことがわかる。

Proposition 2. *Let us set $F = F_m$ for $0 \leq m \leq N-1$. Assume [h-1]. Then for the validity of Theorem 3, the assumption $\beta \leq \gamma$ ([h-3]) is necessary if $\alpha \geq \gamma + 1$. And if $\alpha < 1 + m/2$, then $\beta < \gamma + p(\frac{N-2-m}{2} + \alpha)$ is necessary.*

Proof of Proposition 2. 略

3. Lemmas.

この節では証明なしで定理を証明するのに用いられるレンマを述べます。

Lemma 3-1. *Assume that $u \in L^1_{loc}(\Omega')$ and $Pu \in L^1_{loc}(\Omega')$. Then we have*

$$Pu^+ \le (Pu)sgn^+u, \qquad in\ D'(\Omega'),$$

$$where \qquad sgn^+u = \begin{cases} 1, & for\ u > 0, \\ 1/2, & for\ u = 0, \\ 0, & for\ u < 0. \end{cases}$$

Proof. This follows from Kato's inequality. For the detailed proof of Kato's inequality see [K].

Lemma 3-2. *Assume that [H-1], [H-2] and [H-3]. $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ and $B(x)\cdot Q(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$, and assume that*

$$Pu \le f, \qquad in\ D'(\Omega').$$

Then we have

$$Pu \le f, \qquad in\ D'(\Omega).$$

Lemma 3-3. *Assume that $u \in L^\infty_{loc}(\Omega')$ satisfies $Pu \in L^1_{loc}(\Omega')$in the distribution sense. Assume that [H-1]–[H-4]. Moreover we assume that for almost all $x \in \{x \in \Omega; u(x) \ge 0\}$*

$$Pu + B(x)Q(u) \le C(x).$$

Then we have, for some positive numbers C and ε_0,

$$u(x) \le C[\Phi(x)^{\frac{1}{\delta_0}} d(x)^{-\frac{2}{\delta_0}} + 1], \qquad for\ x\ with\ 0 < d(x) \le \varepsilon_0.$$

Lemma 3-4. *Assume that [H-1] – [H-3]. Assume that $u \in L^\infty_{loc}(\Omega')$ satisfies $Pu \in L^1_{loc}(\Omega')$in the distribution sense. Moreover we assume that for almost all $x \in \{x \in \Omega; u(x) \ge 0\}$*

$$Pu + B(x)Q(u) \le C(x).$$

Then we have

$$B(x)Q(u^+) \in L^1_{loc}(\Omega).$$

4. Proof of Theorem 1.

$\mu = Q^{-1}\big(\sup_{x\in\Omega}\frac{C(x)}{B(x)}\big)$ とおく。Lemma 3-3 と同様にして,

(3-1) $$P(u-\mu) + B(x)(Q(u) - Q(\mu)) \le 0, \quad \text{for } x \in \{u(x) \ge 0\}$$

Lemma 3-1 より

(4-2) $$P(u-\mu)_+ + B(x)sgn^+(u-\mu)(Q(u) - Q(\mu)) \le 0, \quad \text{in } D'(\Omega').$$

したがって Lemma 3-2 から

(4-3) $$P(u-\mu)_+ + B(x)sgn^+(u-\mu)(Q(u) - Q(\mu)) \le 0, \quad \text{in } D'(\Omega).$$

一般性を失うこと無く $\{x : d(x) < 1\} \subset \Omega$ かつ$\mu \ge \sup_{1/2<d(x)<1} u(x)$ とすると,

(4-4) $$u(x) \le \mu, \quad \text{for } d(x) < 1/2$$

が以下のようにわかる。$\phi = (u-\mu)_+$ if $d(x) < 3/4$, and $\phi = 0$ otherwise, と$\phi_j = \min(\phi_j, j)$ ($j = 1, 2, \dots$) とおくとϕ_j を滑らかな関数列$\phi_j^m \in D(\Omega)$ ($m = 1, 2, \dots$) で近似する事ができ、$j \to \infty$ で

(4-5)
$$\phi_j \to \phi = (u-\mu)_+ \text{ in } \Omega \text{ (a.e.)}, \quad BQ(\phi_j) \to BQ(\phi), \text{ in } L^1(\Omega)$$

かつ $m \to \infty$ で、各 j に対して

$$\phi_j^m \to \phi_j \text{ in } \Omega \text{ a.e.}, \quad BQ(\phi_j^m) \to BQ(\phi_j) \text{in } L^1(\Omega).$$

とできる。このことから、Lemma 3-2 と同様にして, 任意の $\psi \in D(\Omega)$ にたいして、ある正の C が存在して、

(4-6)
$$\left|\int_\Omega (\phi_j - \phi)\cdot P\psi\, dx\right| \le C\left|\int_{\mathrm{supp}\,\phi} Q(|\phi_j - \phi|)^{\frac{1}{\delta_0+1}} \cdot \widetilde{A(x)}\, dx\right|$$
$$\le C\left(\int_{supp\psi} B(x)Q(|\phi_j-\phi|)\, dx\right)^{\frac{1}{\delta_0+1}} \cdot \left(\int_\Omega \widetilde{A(x)}\Phi(x)^{\frac{1}{\delta_0}}\, dx\right)^{\frac{\delta_0}{\delta_0+1}} \to 0,$$
as $j \to \infty$ ([H-2] with $n = 1$).

を満たすことがわかる。よって

$$(4\text{-}7) \qquad P\phi_j \to P\phi \quad \text{in } D'(\Omega).$$

$B \in L^1_{loc}(\Omega)$ かつϕ_j^m が一様有界なので同様にして有界収束定理より

$$(4\text{-}8) \qquad P\phi_j^m \to P\phi_j \quad \text{in } D'(\Omega).$$

がでる。それで

$$(4\text{-}9) \qquad P\phi_j^m + B(x)sgn^+(u-\mu)(Q(u)-Q(\mu)) \le o(1), \qquad \text{in } D'(\Omega),$$

$(j, m \to \infty)$ となり、ϕ_j^m がスムーズで $\operatorname{supp}\phi$, $\operatorname{supp}\phi_j^m \subset \{d(x) \le 3/4\}$ であるから,

$$(4\text{-}10) \quad 0 \le \int_{\{u>\mu\}\cap\{d(x)<3/4\}} B(x)\cdot|Q(u)-Q(\mu)|\,dx \le o(1) \qquad \text{as} m \to +\infty.$$

がでる。以上で $\limsup_{x\to\partial F}(u-\mu)_+ = 0$ が示された。

5. Proof of Theorem 2.

Uniqueness.

$$(5\text{-}1) \qquad T(\Omega) = L^\infty(\Omega)\cap H^1_{loc}(\overline{\Omega}\setminus F).$$

とする。u and v がともに解であるとする。すると

$$(5\text{-}2) \qquad P(u-v) + B(x)(Q(u)-Q(v)) = 0, \qquad \text{in } D'(\Omega).$$

$f, B\cdot Q(u) \in L^1(\Omega)$ であるから, Lemmas 3-1, Lemma 3-4 より

$$(5\text{-}3) \qquad \begin{cases} P(u-v)_+ + B(x)sgn^+(u-v)(Q(u)-Q(v)) \le 0, \text{ in } D'(\Omega), \\ P(v-u)_+ + B(x)sgn^+(v-u)(Q(v)-Q(u)) \le 0, \text{ in } D'(\Omega). \end{cases}$$

Theorem 1 と同様にして $(u-v)_+$ を近似する事により $Q(u)=Q(v)$ if $x \in \Omega\setminus F$ が示される。Q は単調であり、d $u = v$ in $IntF$ であるから, $u \equiv v$ in Ωがわかる。

Existence. $N>1$ のときのみ考察する。先ず P を 一様楕円型作用素 $\{P_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ で次のように近似する。P が一様楕円型であれば $H_0^1(\Omega)$ での解の存在はよく知られている。$\varepsilon>0$ として

(5-4)
$$P_\varepsilon = -\operatorname{div}[(\varepsilon + A(x))\nabla\cdot],$$

とおき

(5-5)
$$\begin{cases} P_\varepsilon u + B(x)Q(u) = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

を考える。

Lemma 5-1. *Let* $N>1$. *Assume that the same assumptions as those in Theorem 2. Then there is a unique* $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ *which satisfies (5-5) in the distribution sense. Moreover* u_ε *satisfies*

(5-6)
$$BQ(u_\varepsilon), BQ(u_\varepsilon)u_\varepsilon \in L^1(\Omega).$$

Proof. 略

Remark. (1) コンパクト $K \subset \overline{\Omega}\setminus F$ に対して, $u_\varepsilon \in H^1(K)$ かつ $BQ(u_\varepsilon)u_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ が $\varepsilon>0$ に関して一様に成り立つ。

(2) さらに弱い仮定 $f \in L^1(\Omega)$ のもとで, 同様の存在定理を示すことができる。詳細は例えば [BS, Theorem 12 and its corollary] を見よ。

End of the proof of Theorem 3. u_ε で (4-5) の解を表す。Lemma 5-1 と remarks から、$u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ と $BQ(u_\varepsilon)u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ がわかる。先ず u_ε が定理のアプリオリ評価を $\varepsilon>0$ に関して一様に満たすことを示す。

(4-8)
$$a = \frac{2+\delta_0}{1+\delta_0}, \quad \text{and} \quad b = 2+\delta_0.$$

とおく。(1-8) in [H-3] から, $|u_\varepsilon| \le C(|u_\varepsilon||Q(u_\varepsilon)|)^{\frac{1}{2+\delta_0}}$ がわかる。young's inequality より正数 h に対して

(5-9)
$$\begin{aligned}\int_\Omega |f||u|\,dx &\le \int_\Omega \frac{|f|}{B}(|u_\varepsilon||Q(u_\varepsilon)|)^{\frac{1}{2+\delta_0}} B\,dx \\ &\le a^{-1}h^{-a}\int_\Omega \Big(\frac{|f|}{B}\Big)^a B\,dx + b^{-1}h^b \int_\Omega |u_\varepsilon||Q(u_\varepsilon)|B\,dx.\end{aligned}$$

が成立する。この両辺に u_ε をかけて Ω で積分すれば,

$$\int_\Omega(\varepsilon+A)|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx+(1-Cb^{-1}h^b)\int_\Omega B|u_\varepsilon||Q(u_\varepsilon)|\,dx \le Ca^{-1}h^{-a}\int_\Omega\Big(\frac{|f|}{B}\Big)^a b\,dx. \tag{5-10}$$

を得る。ここで $h^b=b(2C)^{-1}$ と置くと, 所期の不等式が得られる。

次に a priori estimate と compactness より, 部分列 $\{u_{\varepsilon_j}\}_{j=1}^\infty$ を $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ から選び、ある要素 $\overline{u}\in H^1_{loc}(\overline{\Omega}\setminus F)$ に弱収束させることができる。すると $Bu_{\varepsilon_j}Q(u_{\varepsilon_j})$ も $B\overline{u}Q(\overline{u})$ に $L^1_{loc}(\overline{\Omega}\setminus F)$ において収束する（有界収束定理）。そのとき $\overline{u}$ は方程式を $\Omega\setminus F$ で超関数の意味でみたす。ここで

$$u(x)=\begin{cases}\overline{u}(x), & \text{if } x\in\Omega\setminus F,\\ Q^{-1}(f(x)/B(x)), & \text{if } x\in F\setminus\partial F,\end{cases} \tag{5-11}$$

とおく。すると、明らかに u は方程式を $\Omega\setminus\partial F$ で超関数の意味で満たすことがわかる。したがって Theorem 1 より u は Ωで有界であり、Corollary 1 からある一意的な求める解 $v\in L^\infty_{loc}(\Omega)$ が存在して、$v=u$ in $\Omega\setminus\partial F$ を満たすことがわかる。

References

[BBC] Ph. Bénilan, H. Brezis, M.G. Crandall, *A semilinear equation in L^1*,, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **2** (1975), 523–555.

[BG] L. Boccardo, Th. Gallouët, *Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures*, Comm. Partial Differential Equations **87** (1989), 149–169.

[BGDM] L. Boccardo, D. Giachetti, J.I. Diaz, F. Murat,, *Existence of a solution for a weaker form of a nonlinear elliptic equation*, In: Recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems (Nancy, 1988), Pitman Res. Notes Math. Ser. 208, Longman Sc. Tech., Harlow (1989), 229–246.

[BS] H. Brezis, W. Strauss, *Semilinear elliptic equations in L^1*, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 565–590.

[BV] H. Brezis, L. Veron, *Removable singularities for nonlinear elliptic equations*, Archive Rational Mechanics and Analysis **75** (1980), 1–6.

[K] T. Kato, *Schrödinger operators with singular potentials*, Israel J. Math. **13** (1972), 135–148.

[LL] J. Leray, J.L. Lions, *Quelque résultats de Vishik sur les probl èmes elliptiques semi-linéaires par les méthodes de Minty et Browder*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 97–107.

[LM] P.L. Lions, F. Murat, *Sur les solutions renormalisées d'équations elliptiques non linéaires*, to appear.

[R1] J.M. Rakotoson, *Resolution of the critical cases for problems with L^1–data*, Asymptotic Analysis **6** (1993), 229–246.

[R2] J.M. Rakotoson, *Generalized solutions in a new type of sets for problems with measures as data*, Diff. Int. Equations **6** (1993), 27–36.

[R3] J.M. Rakotoson, *Uniqueness of renormalized solutions in a T–set for the L^1–data problem and the link between various formulations*, Indiana Univ. J. **43** (1994), 285–293.

[S] G. Stampacchia, *Some limit cases of L^p–estimates for asolutions of second order elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **32** (1963), 305–310.

[V] L. Veron, *Singularities of solutions of second order quasilinear equations*, Pitman Research Notes in Mathematics Series (Longman) **353** (1996).

[VV1] J.L. Vazques, L. Veron, *Isolated singularities of some nonlinear elliptic equations*, Journal of differential equations **60** (1985), 301–321.

[VV2] J.L. Vazquez, L. Veron, *Singularities of elliptic equations with an exponential nonlinearity*, Math. Ann. **269** (1984), 119–135.

[H] T. Horiuchi, *Removable singularities for semilinear degenerate elliptic equations and its application*, To appear.